Plan Estratégico de Estudios

Ampliación de Matemáticas | Física II | Mecánica de Fluidos

Eduardo E.C.A.

Curso 2025/2026

DÍA 1: RESUMEN DE ALTO RENDIMIENTO

Objetivo: Comprender los operadores espaciales y su aplicación a fuerzas invisibles y fluidos continuos.

1. Ampliación de Matemáticas: Operadores

🧠 Mnemotecnia de Operadores

- **Nabla (∇):** El "bisturí". Vector de derivadas parciales $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$.
- **Gradiente (∇f):** *Escalar* $\rightarrow$ *Vector*. Apunta a la "cuesta más empinada".
- **Divergencia ($\nabla \cdot \vec{F}$):** *Vector* $\rightarrow$ *Escalar*. ¿El punto es un grifo (positivo) o un desagüe (negativo)?
- **Rotacional ($\nabla \times \vec{F}$):** *Vector* $\rightarrow$ *Vector*. ¿El fluido tiende a formar un remolino aquí?

2. Física II: El Campo y el Potencial

⚡ Mnemotecnia Electromagnética

Regla de la "Colina Eléctrica": Las cargas positivas crean "montañas" de potencial. Las negativas crean "valles". El Campo Eléctrico ($\vec{E}$) es una bola rodando hacia abajo. Por eso: $\vec{E} = -\nabla V$ (El campo es el gradiente negativo del potencial).

3. Mecánica de Fluidos: El Medio Continuo

💧 Mnemotecnia de la Viscosidad

La Ley de Newton ($\tau = \mu \frac{du}{dy}$): "La fricción (τ) que sufre el fluido depende de lo pegajoso que sea (μ) y de cuánto se estén rozando las capas entre sí (Gradiente de velocidad $\frac{du}{dy}$)".

DÍA 1: AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Análisis Vectorial y Operadores Diferenciales

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Derivadas parciales (saber derivar respecto a x asumiendo y, z como constantes).
- Álgebra vectorial básica (producto escalar $\cdot$ y producto vectorial $\times$).

En ingeniería no trabajamos en líneas rectas, trabajamos en el espacio tridimensional. Para medir cómo cambian las magnitudes en el espacio $\mathbb{R}^3$, usamos el operador Nabla (∇).

1. El Gradiente (∇f)

Aplica a campos escalares (temperatura, presión). Genera un vector que indica la dirección de máxima tasa de aumento.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

2. La Divergencia ($\nabla \cdot \vec{F}$)

Aplica a campos vectoriales mediante producto escalar. Si $\nabla \cdot \vec{F} > 0$, el punto es una fuente (expansión). Si es < 0, es un sumidero (compresión).

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Ejercicio Tipo Examen

Enunciado: Sea el campo de velocidades de un fluido dado por $\vec{V}(x, y, z) = (x^2y)\hat{i} + (z^3 - 3xy)\hat{j} + (2xz^2)\hat{k}$. Calcula la Divergencia del campo en el punto $P(1, -1, 2)$ y determina si el fluido se está expandiendo o comprimiendo en ese punto.

Paso 1: Cálculo analítico de la Divergencia

Calculamos las derivadas parciales de cada componente:

- $\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) = 2xy$
- $\frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(z^3 - 3xy) = -3x$
- $\frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(2xz^2) = 4xz$

Sumamos: $\nabla \cdot \vec{V} = 2xy - 3x + 4xz$

Paso 2: Evaluación en el punto $P(1, -1, 2)$

Sustituimos $x = 1, y = -1, z = 2$:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 2(1)(-1) - 3(1) + 4(1)(2) = -2 - 3 + 8 = 3$$

Conclusión: Como el resultado es $3 > 0$, el punto actúa como una fuente, es decir, el fluido se está expandiendo (divergiendo) en ese punto.

DÍA 1: FÍSICA II

El Campo Eléctrico y el Potencial

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Ley de Coulomb ($F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$).
- Suma de vectores por componentes cartesianas.
- Concepto de Gradiente (visto en Matemáticas).

1. De la Fuerza al Campo Eléctrico ($\vec{E}$)

El campo eléctrico es la "alteración" del espacio. Si pones una carga de prueba q_0, esta experimenta una fuerza $\vec{F} = q_0\vec{E}$.

$$\vec{E} = k\frac{q}{r^2}\hat{u}_r$$

2. Relación Campo-Potencial

El potencial eléctrico (V) mide la energía potencial por unidad de carga. El campo $\vec{E}$ es el gradiente negativo del potencial V.

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Ejercicio Tipo Examen

Enunciado: En cierta región del espacio, el potencial eléctrico está dado por la función escalar $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + 2z$ (en voltios). Calcula el vector Campo Eléctrico $\vec{E}$ en el punto $P(1, 2, -1)$ y la magnitud de la fuerza que experimentaría un electrón (carga $e = -1.6 \times 10^{-19}$ C) situado en ese punto.

Paso 1: Calcular $\vec{E}$ usando el Gradiente

Sabemos que $\vec{E} = -\nabla V$. Calculamos las derivadas parciales de V:

- $\frac{\partial V}{\partial x} = 10x - 3y$
- $\frac{\partial V}{\partial y} = -3x$
- $\frac{\partial V}{\partial z} = 2$

El campo es: $\vec{E} = -(10x - 3y)\hat{i} - (-3x)\hat{j} - (2)\hat{k}$

Paso 2: Evaluar en el punto $P(1, 2, -1)$

Sustituimos $x = 1, y = 2, z = -1$:

$$E_x = -(10(1) - 3(2)) = -4$$

$$E_y = -(-3(1)) = 3$$

$$E_z = -2$$

Vector Campo Eléctrico: $\vec{E} = -4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ (V/m)

Paso 3: Fuerza sobre el electrón

Calculamos el módulo del campo: $|\vec{E}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29} \approx 5.385$ V/m.

La magnitud de la fuerza es $F = |q| \cdot |\vec{E}|$:

$$F = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C}) \times 5.385 \text{ V/m} = 8.616 \times 10^{-19} \text{ N}$$

DÍA 1: MECÁNICA DE FLUIDOS

Viscosidad y Esfuerzo Cortante

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Concepto de esfuerzo (Fuerza dividida entre Área, $P = F/A$).
- Condición de no deslizamiento (el fluido pegado a una pared sólida tiene la misma velocidad que la pared).

Ley de Viscosidad de Newton

A diferencia de los sólidos, los fluidos se deforman continuamente. La resistencia a esta deformación es la viscosidad. El esfuerzo cortante τ (fuerza de fricción por unidad de área) es proporcional al gradiente de velocidad transversal.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}$$

Donde μ es la viscosidad dinámica (Pa·s).

Ejercicio Tipo Examen: Bloque deslizante

Enunciado: Un bloque cúbico de 20 cm de arista y 25 kg de masa se desliza hacia abajo por un plano inclinado 20° respecto a la horizontal. Entre el bloque y el plano hay una película de aceite de 0.2 mm de espesor y viscosidad $\mu = 0.12$ Pa·s. Suponiendo un perfil de velocidades lineal en el aceite, calcula la velocidad terminal constante (V) que alcanzará el bloque.

Paso 1: Análisis de Fuerzas

A velocidad terminal, la aceleración es cero. La componente del peso que tira hacia abajo por el plano se equilibra exactamente con la fuerza de fricción viscosa que se opone al movimiento.

$$W_x = mg\sin(20^\circ)$$

$$F_{viscosa} = \tau \cdot A$$

$$mg\sin(20^\circ) = \tau \cdot A$$

Paso 2: Expresar τ en función de V

Como el perfil es lineal, $\frac{du}{dy} = \frac{V}{h}$, donde h es el espesor de la película.

$$\tau = \mu\frac{V}{h}$$

Paso 3: Sustituir y despejar V

$$mg\sin(20^\circ) = \left(\mu\frac{V}{h}\right)A \implies V = \frac{mg\sin(20^\circ)\cdot h}{\mu \cdot A}$$

Paso 4: Cálculo numérico

- $m = 25$ kg, $g = 9.81$ m/s^2
- $h = 0.2 \times 10^{-3}$ m (pasado a metros)
- $\mu = 0.12$ Pa·s, $A = 0.04$ m^2

$$V = \frac{25\cdot 9.81\cdot\sin(20^\circ)\cdot(0.2\times 10^{-3})}{0.12\cdot 0.04} \approx 3.49 \text{ m/s}$$

DÍA 2: RESUMEN DE ALTO RENDIMIENTO

Objetivo: Descubrir que sumar lo que sale por una superficie cerrada es igual a sumar lo que se genera en su interior, y aplicar este atajo a campos eléctricos y presiones hidrostáticas.

1. Ampliación de Matemáticas: Teorema de Gauss

🧠 Mnemotecnia del Flujo

El Teorema de la Divergencia (Gauss): "Lo que sale a través de la piel de una naranja (Flujo a través de la superficie) es exactamente igual a la suma de todo el jugo que se está creando dentro de los gajos (Divergencia en el volumen)". Transformamos integrales dobles complejas en integrales triples muy sencillas.

2. Física II: La Ley de Gauss

⚡ Mnemotecnia de la Carga Encerrada

Ley de Gauss: Olvídate de integrar cargas punto por punto. Si tienes simetría (esfera, cilindro, plano), dibuja una "caja mágica" (superficie gaussiana). El flujo eléctrico que atraviesa tu caja depende **exclusivamente** de cuánta carga atrapaste dentro. Lo de fuera no importa.

3. Mecánica de Fluidos: Fluidostática

💧 Mnemotecnia de la Presión

La Fuerza Invisible: En reposo no hay esfuerzo cortante ($\tau = 0$), solo presión perpendicular. La presión empuja más fuerte cuanto más profundo buceas ($P = P_{atm} + \rho g h$). La fuerza total sobre una compuerta es simplemente la presión que hay *justo en su centro geométrico* multiplicada por toda su área.

DÍA 2: AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Flujo Vectorial y el Teorema de la Divergencia

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Concepto de Divergencia ($\nabla \cdot \vec{F}$) del Día 1.
- Cálculo de volúmenes básicos (esferas, cilindros).
- Integración múltiple elemental.

1. Flujo de un Campo Vectorial (Φ)

Imagina un campo de velocidades de un río ($\vec{F}$). El flujo es la cantidad de agua que atraviesa una red (superficie S) por segundo. Se calcula multiplicando el campo por el vector normal al área ($d\vec{S}$).

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

2. El Teorema de la Divergencia (Gauss-Ostrogradsky)

Este teorema es un "salvavidas" en exámenes. Establece que el flujo total que sale a través de una superficie **cerrada** (como la cáscara de un huevo) es igual a la integral de volumen de la divergencia del campo en su **interior**.

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV$$

Ejercicio Tipo Examen

Enunciado: Dado el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (x+y)\hat{\imath} + (y+z)\hat{\jmath} + (z+x)\hat{k}$, calcula el flujo neto que sale a través de la superficie exterior de una esfera de radio $R = 2$ centrada en el origen, utilizando el Teorema de la Divergencia.

Paso 1: Calcular la Divergencia ($\nabla \cdot \vec{F}$)

Derivamos cada componente respecto a su variable:

- $\frac{\partial}{\partial x}(x+y) = 1$
- $\frac{\partial}{\partial y}(y+z) = 1$
- $\frac{\partial}{\partial z}(z+x) = 1$

Por tanto, $\nabla \cdot \vec{F} = 1 + 1 + 1 = 3$. Es constante en todo el espacio.

Paso 2: Aplicar el Teorema

Sustituimos la divergencia en la integral de volumen. Como la divergencia es constante (3), la podemos sacar de la integral:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (3) dV = 3 \iiint_V dV$$

Paso 3: Calcular el Volumen y Resolver

La integral $\iiint_V dV$ es simplemente el volumen de la esfera ($V = \frac{4}{3}\pi R^3$). Para $R = 2$:

$$\text{Volumen} = \frac{4}{3}\pi(2)^3 = \frac{32\pi}{3}$$

$$\text{Flujo Neto} = 3 \times \left(\frac{32\pi}{3}\right) = 32\pi$$

Fíjate cómo hemos evitado hacer una compleja integral de superficie gracias a la divergencia.

DÍA 2: FÍSICA II

La Ley de Gauss en Electromagnetismo

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Teorema de la Divergencia de Matemáticas (Día 2).
- Área superficial de una esfera ($A = 4\pi r^2$) y cilindro ($A = 2\pi r L$).
- Concepto de densidad de carga (λ, σ, ρ).

Ley de Gauss (Forma Integral)

El flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica neta encerrada en su interior. Es la aplicación directa de lo visto en Matemáticas.

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0}$$

Ejercicio Tipo Examen: Esfera Aislante

Enunciado: Una esfera sólida aislante de radio R tiene una densidad volumétrica de carga constante ρ. Calcula la magnitud del campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto interior, a una distancia $r < R$ del centro.

Paso 1: Elegir Superficie y Calcular Flujo

Por simetría, $\vec{E}$ es radial. Dibujamos una esfera gaussiana de radio r (donde $r < R$). En su superficie, el campo E es constante y paralelo al vector de área $d\vec{S}$.

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \iint_S dS = E(4\pi r^2)$$

Paso 2: Calcular la Carga Encerrada (Q_{enc})

Nuestra esfera gaussiana no encierra toda la carga, solo la que hay en el radio r.

$$Q_{enc} = \rho \times V_{interior} = \rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

Paso 3: Aplicar Gauss y Despejar E

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\rho \frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$
$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

Conclusión: En el interior de un aislante, el campo crece linealmente desde cero en el centro ($r = 0$).

DÍA 2: MECÁNICA DE FLUIDOS

Estática de Fluidos y Fuerzas sobre Superficies

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Condición de reposo: No hay gradientes de velocidad, por tanto $\tau = 0$ (visto Día 1).
- Concepto de Centroide (Centro de gravedad geométrico).

1. Ecuación Fundamental de la Hidrostática

La presión en un líquido incompresible aumenta linealmente hacia abajo debido a la gravedad.

$$P = P_{superficie} + \rho g h$$

Donde h es la profundidad vertical.

2. Fuerza Resultante sobre una Placa Plana

Aunque la presión varíe en cada punto, en lugar de resolver la integral $\iint P dA$, la hidrostática nos da un "atajo": La fuerza total es la presión evaluada en el centroide multiplicada por el área.

$$F_R = P_{centroide} \times A = (\rho g h_c) A$$

(El punto de aplicación de esta fuerza se llama Centro de Presiones, y está siempre por debajo del centroide geométrico).

Ejercicio Tipo Examen: Compuerta Vertical

Enunciado: Una compuerta rectangular vertical que bloquea agua ($\rho = 1000$ kg/m^3) tiene un ancho de $b = 2$ m y una altura de $H = 3$ m. El borde superior de la compuerta coincide con la superficie libre del agua. Calcula la fuerza total que el agua ejerce sobre la compuerta.

Paso 1: Determinar el Área y el Centroide

- Área de la compuerta: $A = b \times H = 2 \times 3 = 6$ m².
- Al ser un rectángulo, su centroide está en la mitad de su altura. Como el borde superior está en la superficie, la profundidad del centroide es $h_c = H/2 = 1.5$ m.

Paso 2: Calcular la Presión en el Centroide

$$P_c = \rho g h_c = (1000)(9.81)(1.5) = 14715 \text{ Pa}$$

Paso 3: Calcular la Fuerza Total

$$F_R = P_c \times A = 14715 \times 6 = 88290 \text{ N} = 88.29 \text{ kN}$$

Solución Alternativa (Integrando como en Matemáticas):
$F_R = \int_0^3 (\rho g y)(2dy) = 2\rho g \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^3 = \rho g(9) = 1000 \times 9.81 \times 9 = 88290$ N. ¡El atajo del centroide funciona perfectamente!

DÍA 3: RESUMEN DE ALTO RENDIMIENTO

Objetivo: Entender la tendencia al giro en el espacio (Rotacional) y aplicarlo a los campos magnéticos y a los vórtices en fluidos.

1. Ampliación de Matemáticas: El Rotacional

🧠 Mnemotecnia de la Rueda de Molino

El Rotacional ($\nabla \times \vec{F}$): Imagina que el campo es un río y tú tiras una pequeña rueda de molino al agua. Si el agua empuja más fuerte por un lado que por el otro, la rueda **girará**. El rotacional te dice en qué eje gira esa rueda y a qué velocidad. Se calcula con un determinante.

2. Física II: El Campo Magnético

⚡ Mnemotecnia del Bucle Cerrado

Campos que giran: A diferencia de la electricidad que "nace" en las cargas (divergencia), el magnetismo no tiene principio ni fin. Las líneas de campo magnético ($\vec{B}$) **siempre** forman bucles cerrados. Por eso $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, pero su rotacional nos da la corriente eléctrica que lo genera (Ley de Ampère).

3. Mecánica de Fluidos: Vorticidad

💧 Mnemotecnia del Palo Flotante

Cinemática de Fluidos: Si pones un palito a flotar en un canal y, mientras avanza, también da vueltas sobre sí mismo, el flujo es **rotacional**. A esa capacidad de giro local la llamamos Vorticidad ($\vec{\zeta}$), y es exactamente el rotacional del campo de velocidades: $\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{V}$.

DÍA 3: AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

El Operador Rotacional

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Cálculo de determinantes 3x3.
- Derivadas parciales.
- Operador Nabla $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$.

El Producto Vectorial $\nabla \times \vec{F}$

Mientras que la divergencia es un producto escalar ($\nabla \cdot \vec{F}$), el rotacional es el producto vectorial cruzado entre Nabla y el campo vectorial. El resultado es **otro vector**.

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Si $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$ en todo el espacio, el campo se llama **Irrotacional** o Conservativo (como el campo gravitatorio o el eléctrico estático).

Ejercicio Tipo Examen

Enunciado: Calcula el rotacional del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (-y)\hat{i} + (x)\hat{j} + (0)\hat{k}$. ¿Es un campo conservativo?

Paso 1: Plantear el determinante

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix}$$

Paso 2: Desarrollar por la primera fila

- **Componente $\hat{i}$:** $\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(x) = 0 - 0 = 0$
- **Componente $\hat{j}$:** $-\left[\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(-y)\right] = -[0 - 0] = 0$
- **Componente $\hat{k}$:** $\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) = 1 - (-1) = 2$

Conclusión:

$$\nabla \times \vec{F} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k} = 2\hat{k}$$

Como el resultado no es el vector nulo $\vec{0}$, el campo **no es conservativo** (es un campo que gira puramente alrededor del eje Z).

DÍA 3: FÍSICA II

El Potencial Magnético y el Rotacional

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Concepto de campo magnético ($\vec{B}$).
- Cálculo del rotacional (visto hoy en Matemáticas).

El Potencial Vectorial Magnético ($\vec{A}$)

En el Día 1 vimos que el campo eléctrico viene del gradiente de un potencial escalar ($\vec{E} = -\nabla V$). En magnetismo, como no hay cargas magnéticas aisladas, el campo magnético $\vec{B}$ se obtiene haciendo el **rotacional** de un potencial vectorial $\vec{A}$.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Ejercicio Tipo Examen

Enunciado: En cierta región, el potencial vectorial magnético está dado por $\vec{A} = (y^2)\hat{i} + (x^2)\hat{j} + (0)\hat{k}$ (en Wb/m). Determina el vector campo magnético $\vec{B}$ en el punto $P(2, 1, 0)$.

Paso 1: Aplicar la definición $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Paso 2: Calcular el determinante

- $\hat{i}$: $\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2) = 0 - 0 = 0$
- $\hat{j}$: $-\left[\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2)\right] = 0$

- $\hat{k}$: $\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2x - 2y$

Por tanto, el campo magnético genérico es: $\vec{B}(x, y, z) = (2x - 2y)\hat{k}$ Tesla.

Paso 3: Evaluar en el punto $P(2, 1, 0)$

Sustituimos $x = 2$ e $y = 1$:

$$\vec{B}(2, 1, 0) = (2(2) - 2(1))\hat{k} = (4 - 2)\hat{k} = 2\hat{k}\ \mathrm{T}$$

El campo magnético en ese punto apunta directamente hacia el eje Z positivo con una magnitud de 2 Teslas.

DÍA 3: MECÁNICA DE FLUIDOS

Cinemática: Vorticidad y Flujo Irrotacional

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Campo de velocidades $\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$.
- Cálculo del rotacional (visto en Matemáticas).

1. El Vector Vorticidad ($\vec{\zeta}$)

La vorticidad mide la rotación microscópica de las partículas de fluido. Matemáticamente, es exactamente el doble de la velocidad angular ($\vec{\omega}$) de la partícula, y se calcula como el **rotacional de la velocidad**.

$$\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{V} = 2\vec{\omega}$$

2. Flujo Irrotacional

Si la vorticidad es cero ($\nabla \times \vec{V} = \vec{0}$) en todo el campo, decimos que el flujo es **irrotacional**. Esto simplifica enormemente las ecuaciones de Navier-Stokes y es la base de la aerodinámica ideal (flujo potencial).

Ejercicio Tipo Examen

Enunciado: Se observa un flujo bidimensional cuyo campo de velocidades es $\vec{V} = (3x^2y)\hat{i} + (x^3)\hat{j}$. Determina el vector vorticidad e indica si el flujo es rotacional o irrotacional.

Paso 1: Identificar las componentes de la velocidad

- $u = 3x^2y$
- $v = x^3$
- $w = 0$ (flujo bidimensional en el plano XY)

Paso 2: Calcular el rotacional ($\nabla \times \vec{V}$)

Para un flujo 2D en XY, las derivadas respecto a z son cero, y $w = 0$. El determinante se simplifica muchísimo, dejando solo la componente en $\hat{k}$:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Calculamos las derivadas parciales:

- $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) = 3x^2$
- $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 y) = 3x^2$

Paso 3: Resolver y concluir

$$\vec{\zeta} = (3x^2 - 3x^2)\hat{k} = 0\hat{k} = \vec{0}$$

Conclusión: Como el vector vorticidad es estrictamente cero en todas partes, el flujo es **Irrotacional**. Las partículas de fluido se trasladan y se deforman, pero no giran sobre su propio eje.

DÍA 4: RESUMEN DE ALTO RENDIMIENTO

Objetivo: Relacionar lo que ocurre en el borde de una superficie con lo que gira en su interior, aplicando esto a corrientes eléctricas y vórtices aerodinámicos.

1. Ampliación de Matemáticas: Teorema de Stokes

🧠 Mnemotecnia de la Red de Pescador

El Teorema de Stokes: Imagina una red de pescar (la superficie S) sujeta por un aro metálico (el contorno C). El teorema dice que la suma de todos los "pequeños giros" (rotacional) del fluido que atraviesan la red, es exactamente igual a la corriente neta del fluido que fluye a lo largo del aro metálico (integral de línea).

2. Física II: La Ley de Ampère

⚡ Mnemotecnia del Abrazo Magnético

Ley de Ampère: Dibuja un lazo imaginario en el espacio. El campo magnético total que "circula" por ese lazo depende única y exclusivamente de la cantidad de corriente eléctrica (cables) que atraviesa el interior del lazo. (Regla de la mano derecha: el pulgar es la corriente, los dedos abrazan el campo).

3. Mecánica de Fluidos: La Circulación (Γ)

💧 Mnemotecnia del Huracán

Circulación: Es la versión en fluidos de la integral de línea. Si caminas en círculo alrededor del ojo de un huracán midiendo el viento a tu favor, estás midiendo la circulación. Si el flujo es irrotacional en todas partes, la circulación en cualquier lazo que no encierre un obstáculo o vórtice es estrictamente cero.

DÍA 4: AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Integral de Línea y el Teorema de Stokes

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Cálculo del rotacional ($\nabla \times \vec{F}$) del Día 3.
- Parametrización básica de curvas (ej: una circunferencia).

El Teorema de Stokes

Convierte una integral de línea a lo largo de una curva cerrada C (que suele ser un fastidio parametrizar) en una integral de superficie doble del rotacional del campo sobre cualquier superficie S que tenga a C como borde.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

Nota vital: Si el campo es conservativo, su rotacional es cero. Por tanto, según Stokes, la integral de línea en cualquier curva cerrada será siempre cero (el trabajo para dar una vuelta completa es nulo).

Ejercicio Tipo Examen

Enunciado: Dado el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (-y)\hat{i} + (x)\hat{j} + (z)\hat{k}$. Calcula la integral de línea $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ siendo C la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en el plano $z = 0$, recorrida en sentido antihorario.

Paso 1: Usar Stokes en lugar de parametrizar

En lugar de calcular la integral de línea, calcularemos el flujo del rotacional a través del disco plano S que encierra la circunferencia ($x^2 + y^2 \leq 4, z = 0$). El vector normal a esta superficie es $\hat{k}$.

Paso 2: Calcular el Rotacional de $\vec{F}$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & z \end{vmatrix} = 0\hat{i} - 0\hat{j} + (1 - (-1))\hat{k} = 2\hat{k}$$

Paso 3: Calcular la Integral de Superficie

Como $d\vec{S} = \hat{k} dA$:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_S (2\hat{k}) \cdot (\hat{k} dA) = \iint_S 2dA = 2 \iint_S dA$$

La integral $\iint_S dA$ es simplemente el área del disco de radio $R = 2$, es decir, $\pi(2)^2 = 4\pi$.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2 \times 4\pi = 8\pi$$

DÍA 4: FÍSICA II

La Ley de Ampère

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Teorema de Stokes (visto hoy en Matemáticas).
- Concepto de corriente eléctrica (I) y permeabilidad del vacío (μ_0).

Ley de Ampère (Forma Integral)

La circulación del campo magnético a lo largo de una curva cerrada plana es igual a la permeabilidad del vacío multiplicada por la corriente neta que atraviesa la superficie encerrada por la curva.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{encerrada}$$

Es el equivalente magnético a la Ley de Gauss para la electricidad. Si hay simetría cilíndrica (un cable infinito), nos ahorra integrar con la Ley de Biot-Savart.

Ejercicio Tipo Examen: Cable Infinito

Enunciado: Un cable recto, muy largo, transporta una corriente constante I. Utiliza la Ley de Ampère para determinar la magnitud del campo magnético $\vec{B}$ a una distancia radial r del cable.

Paso 1: Elegir el Lazo Amperiano

Por simetría, sabemos que las líneas de campo magnético forman círculos concéntricos alrededor del cable. Dibujamos una circunferencia de radio r centrada en el cable. En cualquier punto de este lazo, el campo B es constante y paralelo al vector de desplazamiento $d\vec{l}$.

Paso 2: Calcular la Circulación de $\vec{B}$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_C dl = B(2\pi r)$$

Paso 3: Aplicar Ampère y Despejar B

La corriente total que atraviesa nuestro lazo circular es simplemente I.

$$B(2\pi r) = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Conclusión: El campo magnético decae inversamente proporcional a la distancia del cable. Una demostración de 3 líneas gracias a las integrales de contorno.

DÍA 4: MECÁNICA DE FLUIDOS

Circulación y el Vórtice Irrotacional

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Concepto de vorticidad ($\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{V}$) del Día 3.
- Teorema de Stokes (visto en Matemáticas).

1. La Circulación (Γ)

Es la integral de línea de la velocidad del fluido a lo largo de una curva cerrada C. Nos indica cuánto fluido está rotando a lo largo de ese camino macroscópico.

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l}$$

Por el Teorema de Stokes, $\Gamma = \iint_S (\nabla \times \vec{V}) \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{\zeta} \cdot d\vec{S}$. La circulación es el flujo de la vorticidad.

2. Vórtice Irrotacional (o Vórtice Libre)

Es un fenómeno fascinante: el flujo gira en círculos (como un remolino en el lavabo), pero las partículas de fluido **no giran sobre sí mismas** ($\nabla \times \vec{V} = \vec{0}$). La velocidad tangencial es $v_\theta = \frac{K}{r}$ (donde K es una constante). Como el rotacional es cero en todas partes excepto en el centro $r = 0$ (donde hay una singularidad), la circulación en cualquier lazo que no encierre el origen es cero. Si encierra el origen, $\Gamma = 2\pi K$.

Ejercicio Conceptual

Enunciado: Tienes un campo de velocidades dado en coordenadas polares por $\vec{V} = \left(\frac{5}{r}\right)\hat{u}_\theta$. Calcula la circulación Γ a lo largo de una circunferencia de radio $r = 2$ centrada en el origen, y luego a lo largo de una de radio $r = 10$. ¿Qué observas?

Paso 1: Integral de Línea para $r = 2$

El vector de desplazamiento en la circunferencia es $\vec{dl} = rd\theta\hat{u}_\theta$.

$$\Gamma_{r=2} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2}\hat{u}_\theta\right) \cdot (2d\theta\hat{u}_\theta) = \int_0^{2\pi} 5d\theta = 5[\theta]_0^{2\pi} = 10\pi$$

Paso 2: Integral de Línea para $r = 10$

$$\Gamma_{r=10} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{10}\hat{u}_\theta\right) \cdot (10d\theta\hat{u}_\theta) = \int_0^{2\pi} 5d\theta = 10\pi$$

Conclusión: La circulación es **constante** (10π) e independiente del radio. Esto demuestra que toda la "rotación" del sistema está concentrada exclusivamente en la singularidad del origen (el ojo del vórtice). El resto del fluido es completamente irrotacional.

DÍA 5: RESUMEN DE ALTO RENDIMIENTO

Objetivo: Introducir el tiempo. Entender cómo cambian las magnitudes cuando el propio sistema evoluciona y, además, nosotros nos movemos por él.

1. Ampliación de Matemáticas: La Derivada Total

🧠 Mnemotecnia del Viajero en la Montaña

Derivada Total vs Parcial: Imagina que caminas por una montaña que se está enfriando (cae la noche). El cambio total de temperatura que sientes (dT/dt) tiene dos partes: el enfriamiento propio de la montaña (Derivada Parcial respecto al tiempo) **MÁS** el frío extra que sientes por estar subiendo hacia la cima (Regla de la Cadena / Gradiente).

2. Física II: Circuitos Transitorios (RC/RL)

⚡ Mnemotecnia del Vaso de Agua

Carga de un Condensador: Es una Ecuación Diferencial. Al principio el vaso (condensador) está vacío y el agua (corriente) entra rapidísimo. Conforme se llena, el agua entra cada vez más lento hasta que se detiene. El tiempo que tarda en llenarse al 63% depende del tamaño del vaso (C) y del estrecho que sea el grifo (R). Su producto es la constante de tiempo $\tau = RC$.

3. Mecánica de Fluidos: Derivada Material

💧 Mnemotecnia de la Barca en el Río

Aceleración de una partícula ($\frac{D\vec{V}}{Dt}$): Si vas en una barca, tu velocidad puede cambiar por dos motivos: o bien alguien abre una presa de golpe y todo el río acelera (Aceleración Local), o bien el río mantiene su caudal constante pero tú entras en un tramo más estrecho (Aceleración Convectiva).

DÍA 5: AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Derivada Total y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Gradiente (∇f) visto en el Día 1.
- Integrales básicas inmediatas ($\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$).

1. La Derivada Total (Regla de la Cadena)

Si una función $F(x, y, t)$ depende de la posición y el tiempo, y a su vez nos estamos moviendo (x e y dependen de t), la variación total de F respecto al tiempo se calcula sumando la variación explícita más la variación por el movimiento:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

2. EDO de Primer Orden Separable

En ingeniería abundan las ecuaciones donde la tasa de cambio de algo depende de cuánto de ese "algo" hay. Si la ecuación tiene la forma $\frac{dy}{dt} = f(y)g(t)$, podemos agrupar las "y" a un lado y las "t" al otro para integrar.

Ejercicio Tipo Examen: Decaimiento Exponencial

Enunciado: Resuelve la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} + ky = 0$, sabiendo que en el instante inicial $t = 0$, el valor es $y(0) = Y_0$.

Paso 1: Separar variables

Pasamos todo lo que tenga y a la izquierda y lo que tenga t a la derecha:

$$\frac{dy}{dt} = -ky \implies \frac{dy}{y} = -kdt$$

Paso 2: Integrar ambos lados

$$\int \frac{dy}{y} = \int -kdt \implies \ln|y| = -kt + C$$

Paso 3: Despejar $y(t)$ e imponer la condición inicial

Aplicamos la exponencial a ambos lados: $y(t) = e^{-kt+C} = e^C \cdot e^{-kt}$. Llamamos $A = e^C$, entonces $y(t) = Ae^{-kt}$.

Si en $t = 0$, $y = Y_0$: $Y_0 = Ae^0 = A$. Por tanto, la solución final es:

$$y(t) = Y_0 e^{-kt}$$

(Esta ecuación rige cómo se vacía un depósito, cómo decae la radiactividad o cómo pierde temperatura una pieza de motor).

DÍA 5: FÍSICA II

Transitorios: El Circuito RC

Conocimientos Básicos Necesarios:

- EDOs separables (visto hoy en Matemáticas).
- Ley de Ohm ($V = IR$) y Condensadores ($V_c = q/C$).
- Definición de corriente: $I = \frac{dq}{dt}$.

Carga de un Condensador (Uniendo Física y EDOs)

Conectamos una batería (V_0), una resistencia (R) y un condensador descargado (C) en serie. Por la Ley de Mallas de Kirchhoff, la suma de voltajes es igual al de la batería:

$$V_R + V_C = V_0 \implies IR + \frac{q}{C} = V_0$$

Sustituyendo I por la derivada de la carga, obtenemos la EDO fundamental:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V_0$$

Ejercicio Tipo Examen

Enunciado: En un circuito RC con $V_0 = 10$ V, $R = 2$ kΩ y $C = 5$ mF, el condensador está inicialmente descargado. Resuelve la EDO para encontrar la carga $q(t)$ y calcula cuánto tiempo tardará en alcanzar el 63.2% de su carga máxima.

Paso 1: Resolver la EDO (Separación de variables)

Reordenamos: $\frac{dq}{dt} = \frac{V_0 C - q}{RC}$. Separamos e integramos (similar a Matemáticas):

$$\int_0^q \frac{dq}{V_0 C - q} = \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

Resolviendo, llegamos a la famosa ecuación de carga:

$$q(t) = CV_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Paso 2: Calcular la Constante de Tiempo (τ)

Llamamos $\tau = RC$. Es el tiempo característico del circuito.

$$\tau = (2 \times 10^3 \ \Omega) \times (5 \times 10^{-3} \ \mathrm{F}) = 10 \text{ segundos}$$

Paso 3: Evaluar para $t = \tau$

Si evaluamos la ecuación en $t = \tau = 10$ s, el exponente es -1:

$$q(\tau) = CV_0(1 - e^{-1}) \approx CV_0(1 - 0.368) = 0.632 \ CV_0$$

Conclusión: El 63.2% de la carga máxima (CV_0) se alcanza exactamente cuando transcurre un tiempo igual a τ (10 segundos en este caso).

DÍA 5: MECÁNICA DE FLUIDOS

La Derivada Material y la Aceleración del Fluido

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Derivada Total de Matemáticas (Día 5).
- Concepto de Gradiente (∇) y Producto Escalar ($\cdot$).

La Derivada Material o Sustancial ($\frac{D}{Dt}$)

En fluidos estudiamos campos de velocidad $\vec{V}(x, y, z, t)$. La aceleración de una partícula de fluido que viaja por este campo no es solo $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$. Hay que usar la **Derivada Total** vista en matemáticas, que en fluidos se denota con una "D" mayúscula.

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}_{\text{Local}} + \underbrace{(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V}}_{\text{Convectiva}}$$

- **Aceleración Local:** El campo cambia con el tiempo (abren un grifo).
- **Aceleración Convectiva:** La partícula entra en una zona más estrecha y debe acelerar por conservación de masa, aunque el flujo sea estacionario (independiente del tiempo).

Ejercicio Conceptual Clave

Enunciado: Considera el flujo de agua a través de una tobera convergente de una manguera. El flujo es estacionario (el operario no varía el caudal). El campo de velocidades en el eje central de la tobera viene dado por $\vec{V}(x) = (2 + 5x)\hat{i}$ m/s. Calcula la aceleración de una partícula de fluido que pasa por $x = 1$ m.

Paso 1: Aceleración Local

Como el flujo es estacionario (la ecuación no tiene "t"), la derivada parcial respecto al tiempo es cero:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{0}$$

Paso 2: Aceleración Convectiva

Aplicamos la fórmula unidimensional de la aceleración convectiva: $u\frac{\partial u}{\partial x}$

- Velocidad $u = 2 + 5x$
- Gradiente de velocidad $\frac{\partial u}{\partial x} = 5$

$$a_{conv} = (2 + 5x) \times 5 = 10 + 25x$$

Paso 3: Evaluar en $x = 1$

$$\vec{a}(1) = (10 + 25(1))\hat{\imath} = 35\hat{\imath}\ \mathrm{m/s^2}$$

Conclusión: Aunque la manguera esté soltando agua de forma constante (Local=0), las partículas experimentan una enorme aceleración de 35 m/s² simplemente porque el espacio se estrecha (Convectiva). ¡Esta es la magia y la trampa de la Mecánica de Fluidos!

DÍA 6: RESUMEN DE ALTO RENDIMIENTO

Objetivo: Entender qué ocurre cuando el flujo que atraviesa una superficie no es estático, sino que cambia con el tiempo. De aquí nacen los motores eléctricos y la conservación de la masa en tuberías.

1. Ampliación de Matemáticas: Variación del Flujo

🧠 Mnemotecnia de la Ventana Rota

Derivada de una Integral: Si quieres saber cómo cambia la cantidad de lluvia que entra por tu ventana (flujo), tienes que derivar la integral. El cambio total depende de si la lluvia arrecia (derivada temporal del campo) o si tú estás abriendo/cerrando la ventana (cambio del área de integración).

2. Física II: Ley de Faraday-Lenz

⚡ Mnemotecnia del Gato Casero

Inducción Electromagnética: La naturaleza odia los cambios (Ley de Lenz). Si intentas meterle más flujo magnético a una espira, esta creará una corriente en sentido contrario para "frenar" ese aumento. La fuerza de esa corriente (F.E.M.) es exactamente igual a la velocidad con la que cambias el flujo magnético (Faraday).

3. Mecánica de Fluidos: Teorema de Reynolds (TTR)

💧 Mnemotecnia de la Estación de Metro

Volumen de Control vs Sistema: En vez de seguir a un grupo específico de pasajeros (Sistema), vigilas los andenes de una estación (Volumen de Control). El cambio de personas en tu vagón dependerá de la gente que ya hay esperando en la estación MÁS la diferencia entre los que entran por la puerta sur y salen por la norte (Flujos netos).

DÍA 6: AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Derivación bajo el Signo Integral

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Concepto de Flujo ($\Phi = \iint \vec{F} \cdot d\vec{S}$) del Día 2.
- Derivadas temporales elementales.

Variación Temporal del Flujo Vectorial

Si tenemos un campo vectorial $\vec{F}(x, y, z, t)$ que atraviesa una superficie fija S, el flujo cambia con el tiempo. Para saber a qué velocidad cambia ese flujo, derivamos la integral respecto al tiempo. Como la superficie es fija (no depende del tiempo), la derivada "entra" dentro de la integral y afecta solo al campo.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Esta es la base matemática exacta de la Ley de Faraday que verás en Física.

Ejercicio Tipo Examen

Enunciado: Dado un campo vectorial dependiente del tiempo $\vec{F} = (2t)\hat{\imath} + (t^2)\hat{\jmath} + (0)\hat{k}$. Calcula la tasa de variación temporal del flujo que atraviesa un cuadrado de lado $L = 3$ situado en el plano YZ ($x = 0$), cuyo vector normal es $\hat{\imath}$.

Paso 1: Identificar el campo y la superficie

- El vector normal es $\hat{n} = \hat{\imath}$, así que $d\vec{S} = \hat{\imath} dA$.
- El área total del cuadrado es $A = L^2 = 3^2 = 9$.

Paso 2: Calcular el Flujo $\Phi(t)$ y luego derivarlo

Primero, calculamos el flujo para cualquier instante de tiempo t:

$$\Phi(t) = \iint_S \vec{F} \cdot (\hat{i} dA) = \iint_S (2t) dA = 2t \iint_S dA$$
$$\Phi(t) = 2t \times (9) = 18t$$

Ahora derivamos el resultado respecto al tiempo:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(18t) = 18$$

Paso 3: Método Alternativo (Entrando la derivada)

Derivamos primero el campo: $\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = 2\hat{i} + 2t\hat{j} + 0\hat{k}$.

$$\frac{d\Phi}{dt} = \iint_S (2\hat{i} + 2t\hat{j}) \cdot (\hat{i} dA) = \iint_S 2dA = 2(9) = 18$$

Ambos caminos llevan al mismo resultado. La tasa de cambio del flujo es constante (18 unidades por segundo).

DÍA 6: FÍSICA II

La Ley de Faraday-Lenz

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Concepto de Flujo Magnético ($\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$).
- Derivada de una integral (visto hoy en Matemáticas).

Inducción Electromagnética

Si el flujo magnético que atraviesa un circuito cerrado (como una espira de cobre) cambia con el tiempo, se induce una Fuerza Electromotriz (ε, voltaje) en el circuito. Esta es la base de la generación de electricidad a nivel mundial.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

El signo **negativo** es la Ley de Lenz: la corriente inducida siempre circulará en el sentido que genere un campo magnético que *se oponga* al cambio original.

Ejercicio Tipo Examen: La Espira en el Campo Variable

Enunciado: Una espira circular de radio $r = 0.5$ m está en el plano XY. Un campo magnético uniforme espacialmente, pero variable en el tiempo, está dado por $\vec{B}(t) = (0.2t^2)\hat{k}$ Teslas. Calcula la magnitud de la fuerza electromotriz (F.E.M.) inducida en el instante $t = 3$ segundos.

Paso 1: Calcular el Flujo Magnético (Φ_B)

Como la espira está en XY, su vector normal es $\hat{k}$. El campo es paralelo al vector normal, así que el producto escalar es directo.

Área de la espira: $A = \pi r^2 = \pi(0.5)^2 = 0.25\pi$ m².

$$\Phi_B(t) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B(t) \times A = (0.2t^2) \times (0.25\pi) = 0.05\pi t^2 \text{ Webers}$$

Paso 2: Aplicar la Ley de Faraday

Derivamos el flujo respecto al tiempo para obtener la F.E.M.:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}(0.05\pi t^2) = -0.1\pi t$$

Paso 3: Evaluar en $t = 3$ s

$$|\varepsilon| = |-0.1\pi(3)| = 0.3\pi \approx 0.942 \text{ Voltios}$$

Conclusión: En el instante $t = 3$ s, el campo magnético cambiante está actuando como si hubiéramos conectado una pila de casi 1 Voltio a nuestra espira de cobre.

DÍA 6: MECÁNICA DE FLUIDOS

El Teorema del Transporte de Reynolds (TTR)

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Diferencia entre derivada parcial y total (Día 5).
- Cálculo de flujos con integrales de superficie (Día 2).

La Ecuación Maestra (TTR)

Las leyes de la física (como $F = ma$) aplican a un **Sistema** (una masa fija de fluido). Pero en ingeniería solemos estudiar un **Volumen de Control (VC)** fijo en el espacio (ej. el interior de un motor). El TTR traduce lo que le pasa al Sistema a lo que vemos en el Volumen de Control.

Para cualquier propiedad B (masa, cantidad de movimiento, energía) y su cantidad por unidad de masa $\beta = B/m$:

$$\frac{dB_{sist}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \beta \rho dV + \iint_{SC} \beta \rho (\vec{V} \cdot \hat{n}) dS$$

Traducción: El cambio total en el sistema = (Lo que se acumula dentro de la máquina) + (Lo que sale por los tubos - Lo que entra por los tubos).

Aplicación Directa: Ecuación de Continuidad (Conservación de Masa)

Enunciado: Por una tubería horizontal entra agua incompresible (ρ = cte) de forma estacionaria. La sección de entrada tiene un área $A_1 = 0.2$ m² y la velocidad del agua es $V_1 = 5$ m/s. La sección de salida se estrecha a $A_2 = 0.05$ m². Calcula la velocidad de salida V_2 usando el TTR.

Paso 1: Aplicar el TTR a la Masa

Si la propiedad es la masa ($B = m$), entonces $\beta = m/m = 1$. Por la ley de conservación de masa, la masa de un sistema no se crea ni se destruye: $\frac{dm_{sist}}{dt} = 0$.

Como el flujo es estacionario, no se acumula masa en la tubería: $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho dV = 0$.

Paso 2: Evaluar la Integral de Superficie (Caudales netos)

Nos queda que el flujo neto de masa a través de la superficie de control (SC) es cero:

$$\iint_{SC} \rho(\vec{V} \cdot \hat{n}) dS = 0 \implies \textbf{Flujo Másico Salida} - \textbf{Flujo Másico Entrada} = 0$$

Como ρ es constante, se simplifica a la ecuación de los caudales volumétricos:

$$Q_{salida} = Q_{entrada} \implies A_2 V_2 = A_1 V_1$$

Paso 3: Despejar la Velocidad de Salida (V_2)

$$V_2 = \frac{A_1 V_1}{A_2} = \frac{0.2 \times 5}{0.05} = \frac{1}{0.05} = 20 \text{ m/s}$$

Conclusión: Al estrecharse la tubería 4 veces (de 0.2 a 0.05), el agua debe acelerar 4 veces (de 5 a 20 m/s) para que se conserve la masa. ¡El TTR en acción de la forma más sencilla!

DÍA 7: RESUMEN DE ALTO RENDIMIENTO

Objetivo: Manejar las derivadas espaciales de segundo orden (el Laplaciano) y comprender cómo describen la propagación de ondas electromagnéticas y la fricción en fluidos viscosos.

1. Ampliación de Matemáticas: El Laplaciano

🧠 Mnemotecnia del Termostato Natural

Operador Laplaciano (∇^2): Es la divergencia del gradiente. Mide cuánto difiere el valor en un punto del promedio de sus alrededores. Si un punto está más caliente que su entorno (Laplaciano negativo), el calor tenderá a "escapar" de ahí para igualar las cosas (Difusión).

2. Física II: Ondas Electromagnéticas

⚡ Mnemotecnia del Baile Infinito

Ecuación de Onda de Maxwell: Un campo eléctrico cambiante crea un campo magnético cambiante, que a su vez crea un campo eléctrico... Se empujan el uno al otro viajando por el espacio a la velocidad de la luz (c). La ecuación relaciona la derivada segunda espacial (Laplaciano) con la derivada segunda temporal.

3. Mecánica de Fluidos: Navier-Stokes

💧 Mnemotecnia de la Miel Derramada

Fricción Viscosa: La Ecuación de Navier-Stokes es simplemente la Segunda Ley de Newton ($F = ma$) para fluidos. El término de la fricción ($\mu\nabla^2\vec{V}$) usa el Laplaciano para frenar a las capas de fluido que van más rápido que sus vecinas, igual que la miel es pegajosa y arrastra a las capas adyacentes.

DÍA 7: AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

El Operador Laplaciano (∇^2)

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Cálculo del Gradiente (∇f) (Día 1).
- Cálculo de la Divergencia ($\nabla \cdot \vec{F}$) (Día 1).
- Derivadas parciales de segundo orden.

El Laplaciano de un Campo Escalar

Se define como la divergencia del gradiente de una función escalar $f(x, y, z)$. Es la suma de las segundas derivadas parciales puras. Convierte un campo escalar en **otro campo escalar**.

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Aparece en las ecuaciones de calor, propagación de ondas y potencial electrostático (Ecuación de Poisson/Laplace).

Ejercicio Tipo Examen

Enunciado: Dada la función de potencial electrostático $V(x, y, z) = 3x^2y - y^3 + z^2$, calcula su Laplaciano ($\nabla^2 V$). Si $\nabla^2 V = 0$ en una región, se dice que satisface la ecuación de Laplace. ¿Se cumple en este caso?

Paso 1: Calcular las primeras derivadas (Gradiente)

- $\frac{\partial V}{\partial x} = 6xy$
- $\frac{\partial V}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$
- $\frac{\partial V}{\partial z} = 2z$

Paso 2: Calcular las segundas derivadas

Derivamos cada componente por su misma variable otra vez:

- $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(6xy) = 6y$

- $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 3y^2) = -6y$
- $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}(2z) = 2$

Paso 3: Sumar para obtener el Laplaciano

$$\nabla^2 V = 6y + (-6y) + 2 = 2$$

Conclusión: El Laplaciano es constante e igual a 2. Como no es cero, **no satisface** la ecuación de Laplace en el espacio (físicamente, esto significa que la región tiene una densidad de carga constante según la Ecuación de Poisson).

DÍA 7: FÍSICA II

Ecuaciones de Maxwell y Ondas Electromagnéticas

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Operador Laplaciano ∇^2 (visto en Matemáticas).
- Ley de Faraday (Día 6) y Ley de Ampère-Maxwell.

La Ecuación de Onda

Combinando el rotacional de Faraday y el rotacional de Ampère, Maxwell llegó a una ecuación diferencial de segundo orden para el vacío (sin cargas ni corrientes):

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Esta es la ecuación matemática estándar de una onda que viaja a una velocidad $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$. Al calcular este valor, dio exactamente la velocidad de la luz $c \approx 3 \times 10^8$ m/s. ¡Así descubrió que la luz es electromagnetismo!

Ejercicio Tipo Examen

Enunciado: Una onda electromagnética plana viaja en el vacío en la dirección $+x$. El campo eléctrico oscila en el eje Y y está dado por $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t)\hat{j}$. Determina la magnitud y dirección del campo magnético asociado $\vec{B}(x,t)$.

Paso 1: Relación de Amplitudes

En una onda electromagnética en el vacío, las magnitudes de los campos están directamente relacionadas por la velocidad de la luz:

$$B_0 = \frac{E_0}{c}$$

Paso 2: Determinar la Dirección

Las ondas EM son transversales. El campo eléctrico $\vec{E}$, el magnético $\vec{B}$ y la dirección de propagación $\vec{v}$ son perpendiculares entre sí, formando un triedro directo (regla de la mano derecha): $\vec{E} \times \vec{B} \parallel \vec{v}$.

- Dirección de propagación $\vec{v}$: vector unitario $\hat{i}$ (dirección $+x$).
- Dirección de $\vec{E}$: vector unitario $\hat{j}$.

Como $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$, el campo magnético debe oscilar obligatoriamente en la dirección del eje Z (vector unitario $\hat{k}$).

Paso 3: Construir el Vector Magnético

Ambos campos están en fase (tienen el mismo argumento en el coseno):

$$\vec{B}(x,t) = \frac{E_0}{c}\cos(kx - \omega t)\hat{k}$$

DÍA 7: MECÁNICA DE FLUIDOS

Ecuaciones de Navier-Stokes

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Derivada Material $\frac{D\vec{V}}{Dt}$ (Día 5).
- El Laplaciano ∇^2 (Día 7 Matemáticas).
- Gradiente de Presión ∇P.

Navier-Stokes (Flujo Incompresible)

Es la Segunda Ley de Newton ($F = ma$) dividida por el volumen. Suma las fuerzas de presión, gravedad y fricción viscosa para obtener la aceleración de la partícula de fluido.

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

- $\rho \frac{D\vec{V}}{Dt}$: Inercia (Masa x Aceleración material).
- $-\nabla P$: Fuerza debida a la diferencia de presiones (empuje).
- $\rho \vec{g}$: Fuerzas de volumen (gravedad).
- $\mu \nabla^2 \vec{V}$: Fricción por viscosidad dinámica (μ). Aquí es donde brilla el Laplaciano.

Ejercicio Clásico: Flujo entre Placas Paralelas (Couette-Poiseuille)

Enunciado: Tienes un fluido viscoso moviéndose entre dos placas infinitas fijas horizontales separadas por una distancia h. El flujo es estacionario y está completamente desarrollado (la velocidad u solo depende de y). Demuestra cómo se simplifica Navier-Stokes en la dirección x.

Paso 1: Simplificar la Aceleración (Término Izquierdo)

Como el flujo es estacionario ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) y completamente desarrollado (u no cambia en x, así que no hay aceleración convectiva), la derivada material es cero.

$$\rho \frac{Du}{Dt} = 0$$

Paso 2: Simplificar las Fuerzas (Término Derecho)

- No hay gravedad en la dirección horizontal x: $\rho g_x = 0$.
- El Laplaciano de la velocidad $\nabla^2 u$ se simplifica porque u solo depende de y. Por tanto, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. Solo queda $\frac{d^2 u}{dy^2}$.

Paso 3: Ecuación Resultante

Sustituyendo todo en la ecuación original en la dirección x:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{d^2 u}{dy^2}$$

Reordenando, nos queda una sencilla Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de segundo orden que puedes resolver integrando dos veces respecto a y:

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dP}{dx}$$

Conclusión: En este tipo de flujos rectos, el empuje de la presión ($\frac{dP}{dx}$) se equilibra perfectamente con el frenado por fricción viscosa ($\mu \frac{d^2 u}{dy^2}$). El resultado al integrar esto es un perfil de velocidades con forma de parábola.

DÍA 8: RESUMEN DE ALTO RENDIMIENTO

Objetivo: Dominar los atajos matemáticos para sistemas oscilantes (fasores) y entender el principio supremo de conservación de energía en fluidos (Bernoulli).

1. Ampliación de Matemáticas: Números Complejos

🧠 Mnemotecnia de la Manecilla del Reloj

Fasores y Euler: En lugar de lidiar con senos y cosenos horribles al derivar, usamos la Fórmula de Euler. Un número complejo en forma polar ($Ae^{j\theta}$) es simplemente la manecilla de un reloj: tiene una longitud (Amplitud) y un ángulo (Fase). Derivar en el tiempo es tan fácil como multiplicar por $j\omega$.

2. Física II: Corriente Alterna e Impedancia

⚡ Mnemotecnia del Camino de Obstáculos

La Impedancia (Z): En un circuito de alterna, la Resistencia frena la corriente gastando energía (calor), pero las Bobinas y Condensadores la "rebotan" (Reactancia). La Impedancia total es un número complejo donde la parte real es la resistencia y la imaginaria es el rebote. Nos permite usar la Ley de Ohm ($V = IZ$) en alterna.

3. Mecánica de Fluidos: Ecuación de Bernoulli

💧 Mnemotecnia de la Montaña Rusa

Energía Fluida: Un fluido sin fricción (ideal) solo tiene tres formas de energía: Presión, Velocidad (cinética) y Altura (potencial). Si subes una de ellas, otra tiene que bajar. Si el tubo se estrecha, la velocidad sube, por lo que la presión **tiene que caer** (Efecto Venturi).

DÍA 8: AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Números Complejos y la Identidad de Euler

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Trigonometría básica (seno, coseno, arcotangente).
- Concepto de número imaginario $j = \sqrt{-1}$. *(En ingeniería usamos 'j' en vez de 'i' para no confundirlo con la corriente eléctrica).*

La Fórmula de Euler

Es el puente perfecto entre la geometría (trigonometría) y el álgebra (exponenciales). Un número complejo se puede expresar en forma binómica o polar:

$$z = a + jb = Me^{j\theta} = M(\cos\theta + j\sin\theta)$$

- **Módulo (M):** Longitud del vector. $M = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- **Fase (θ):** Ángulo. $\theta = \arctan(\frac{b}{a})$.

Ejercicio Tipo Examen

Enunciado: Tienes dos números complejos: $z_1 = 3 + j4$ y $z_2 = 5e^{j\frac{\pi}{2}}$. Calcula su producto $P = z_1 \times z_2$ expresando el resultado final en forma binómica.

Paso 1: Convertir z_1 a forma polar

Módulo de z_1: $M_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$.

Fase de z_1: $\theta_1 = \arctan(\frac{4}{3}) \approx 53.1°$ (o 0.927 radianes).

$$z_1 = 5e^{j53.1°}$$

Paso 2: Multiplicar en forma polar

Multiplicar exponenciales es facilísimo: se multiplican los módulos y se suman los exponentes (ángulos). Nota: z_2 tiene un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes, que son $90°$.

$$P = (5 \times 5)e^{j(53.1° + 90°)} = 25e^{j143.1°}$$

Paso 3: Pasar el resultado a binómica

$$P = 25(\cos(143.1°) + j\sin(143.1°))$$

$$P \approx 25(-0.8 + j0.6) = -20 + j15$$

Conclusión: Multiplicar por un número complejo polar equivale a estirar el vector original y rotarlo. Las exponenciales complejas nos salvan la vida en ingeniería eléctrica.

DÍA 8: FÍSICA II

Impedancia y Circuitos de Corriente Alterna

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Números complejos y forma polar (Matemáticas Día 8).
- Ley de Ohm básica ($V = IR$).

La Impedancia Compleja (Z)

En alterna, el voltaje y la corriente oscilan. Para no usar Ecuaciones Diferenciales, convertimos las ondas en "Fasores" (vectores giratorios). La resistencia al paso de la corriente se convierte en un número complejo llamado Impedancia, medido en Ohmios (Ω).

$$\vec{V} = \vec{I} \cdot \vec{Z}$$

- **Resistencia (R):** $Z_R = R$ (Pura parte real, disipa energía).
- **Bobina (L):** $Z_L = j\omega L$ (Desfasa la corriente 90° hacia atrás).
- **Condensador (C):** $Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C}$ (Desfasa la corriente 90° hacia adelante).

Ejercicio Tipo Examen

Enunciado: Un circuito en serie tiene una resistencia $R = 30\ \Omega$ y una bobina con reactancia inductiva $X_L = \omega L = 40\ \Omega$. Se conecta a una fuente de tensión alterna expresada como el fasor $\vec{V} = 100\ e^{j0^\circ}$ V. Calcula el fasor de la corriente $\vec{I}$.

Paso 1: Calcular la Impedancia Equivalente (Z_{eq})

Al estar en serie, las impedancias se suman como números complejos normales.

$$Z_{eq} = Z_R + Z_L = 30 + j40\ \Omega$$

Paso 2: Pasar Z_{eq} a forma polar

Módulo: $|Z| = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600} = 50\ \Omega$.

Ángulo: $\phi = \arctan(\frac{40}{30}) \approx 53.1°$.

$$Z_{eq} = 50\ e^{j53.1°}\ \Omega$$

Paso 3: Aplicar la Ley de Ohm en Fasores

Despejamos la corriente $\vec{I} = \frac{\vec{V}}{Z_{eq}}$ y dividimos en forma polar:

$$\vec{I} = \frac{100\ e^{j0°}}{50\ e^{j53.1°}} = \left(\frac{100}{50}\right) e^{j(0° - 53.1°)}$$
$$\vec{I} = 2\ e^{-j53.1°}\ \text{Amperios}$$

Conclusión: La corriente tiene una amplitud de 2 Amperios, pero va "retrasada" $53.1°$ respecto al voltaje. Todo calculado con álgebra básica gracias a los números complejos.

DÍA 8: MECÁNICA DE FLUIDOS

La Ecuación de Bernoulli

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Conservación de la masa (Caudal $Q = A \cdot V$) visto en el Día 6.
- Densidad (ρ) y presión (P).

El Santo Grial de los Fluidos Ideales

Si un flujo es incompresible, no tiene fricción (viscosidad nula) y es estacionario, la energía mecánica total de una partícula de fluido se mantiene estrictamente constante a lo largo de su camino (línea de corriente). Es la ecuación de Navier-Stokes (Día 7) llevada a su máxima simplificación.

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g z_2 = \text{Constante}$$

Es un balance de tres energías: Trabajo de Presión + Energía Cinética + Energía Potencial.

Ejercicio Clásico: Teorema de Torricelli

Enunciado: Un gran depósito de agua abierto a la atmósfera está lleno hasta una altura $H = 5$ metros. Se hace un pequeño agujero en la base del depósito. Calcula la velocidad V_2 con la que sale el chorro de agua por el agujero. (Dato: $g = 9.81$ m/s²).

Paso 1: Identificar los puntos 1 y 2

- **Punto 1 (Superficie del depósito):** Altura $z_1 = H$. Presión $P_1 = P_{atm}$. Velocidad $V_1 \approx 0$ (el depósito es tan grande que el nivel baja lentísimo).
- **Punto 2 (Agujero de salida):** Altura $z_2 = 0$ (nuestra referencia). Presión $P_2 = P_{atm}$ (el chorro sale al aire libre). Velocidad V_2 es la incógnita.

Paso 2: Aplicar Bernoulli

Sustituimos todos nuestros datos en la ecuación:

$$P_{atm} + 0 + \rho g H = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho V_2^2 + 0$$

Paso 3: Simplificar y Despejar V_2

Como P_{atm} está a ambos lados, se cancela. Nos queda:

$$\rho g H = \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

Las densidades (ρ) también se cancelan (el agua pesa igual arriba que abajo). Despejando la velocidad:

$$V_2 = \sqrt{2gH}$$

$$V_2 = \sqrt{2 \times 9.81 \times 5} = \sqrt{98.1} \approx 9.9\ \mathrm{m/s}$$

Conclusión: El agua sale del agujero exactamente con la misma velocidad que tendría si la hubieras dejado caer libremente en el aire desde esa misma altura de 5 metros. ¡Pura conservación de la energía!

DÍA 9: RESUMEN DE ALTO RENDIMIENTO

Objetivo: Descomponer señales complejas en partes sencillas, calcular la potencia útil en circuitos eléctricos y enfrentarnos a la fricción real en el bombeo de fluidos.

1. Ampliación de Matemáticas: Series de Fourier

🧠 Mnemotecnia del Batido de Frutas

Análisis Armónico: Cualquier señal periódica compleja (como un latido del corazón o una onda cuadrada) es un "batido". Fourier es la máquina que separa el batido de vuelta en sus ingredientes originales (una suma de senos y cosenos perfectos). El coeficiente a_0 es simplemente el "sabor base" (el valor medio de la función).

2. Física II: Potencia en Corriente Alterna

⚡ Mnemotecnia de la Cerveza

El Factor de Potencia ($\cos \phi$): En alterna, la energía total (Potencia Aparente) es como un vaso de cerveza. La parte líquida que te bebes es la **Potencia Activa** (la que hace trabajo real en la resistencia). La espuma que no sirve para nada pero ocupa espacio en el vaso es la **Potencia Reactiva** (rebotada por bobinas y condensadores).

3. Mecánica de Fluidos: Flujo Real en Tuberías

💧 Mnemotecnia del Peaje en la Autopista

Ecuación de Darcy-Weisbach: A diferencia de Bernoulli (flujo ideal), en la vida real el agua paga un "peaje" por rozar con las paredes del tubo. Esa pérdida de energía (h_f) es mayor cuanto más largo sea el tubo (L), más estrecho sea (D), más rápido vayas (V^2) y más rugoso sea el asfalto (factor de fricción f).

DÍA 9: AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Series de Fourier

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Cálculo integral definido.
- Funciones periódicas (periodo T, frecuencia angular $\omega = 2\pi/T$).
- Integración por partes (vital para los coeficientes).

La Serie Trigonométrica

Si $f(t)$ es una función periódica de periodo T, bajo ciertas condiciones se puede expresar como una suma infinita de ondas senoidales y cosenoidales:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

El término $\frac{a_0}{2}$ es el Valor Medio (la componente continua o DC en circuitos).

Ejercicio Tipo Examen: Valor Medio de una Onda Cuadrada

Enunciado: Sea $f(t)$ una onda cuadrada de periodo $T = 2\pi$, definida como $f(t) = A$ para $0 \leq t < \pi$ y $f(t) = 0$ para $\pi \leq t < 2\pi$. Calcula su coeficiente a_0 y el valor medio de la señal.

Paso 1: Fórmula del coeficiente a_0

El coeficiente a_0 se calcula integrando la función sobre un periodo completo y dividiendo entre la mitad del periodo:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)dt$$

Paso 2: Plantear la integral a trozos

Como $T = 2\pi$, dividimos la integral en los dos tramos de la onda:

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} A dt + \int_{\pi}^{2\pi} 0 dt\right)$$

Paso 3: Resolver la integral

$$a_0 = \frac{1}{\pi}[A \cdot t]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}(A\pi - 0) = A$$

Conclusión: El coeficiente es $a_0 = A$. El **valor medio** de la señal es la mitad de esto, es decir, $\frac{A}{2}$. Tiene sentido lógico: si la mitad del tiempo está en A y la otra mitad en 0, su promedio exacto es $\frac{A}{2}$.

DÍA 9: FÍSICA II

Potencia en Corriente Alterna

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Impedancia compleja $Z = R + jX$ (Día 8).
- Desfase entre voltaje y corriente (ϕ).
- Valores eficaces ($V_{rms} = V_0/\sqrt{2}$).

El Triángulo de Potencias

En circuitos de alterna, multiplicar Voltaje por Corriente no da directamente la potencia útil si hay bobinas o condensadores que desfasan la señal.

- **Potencia Aparente (S):** Lo que la red suministra. $S = V_{rms}I_{rms}$ (medida en VA).
- **Potencia Activa (P):** La energía real que produce calor o trabajo. $P = V_{rms}I_{rms}\cos(\phi)$ (medida en W).
- **Factor de Potencia (fdp):** Es el $\cos(\phi)$. Indica la eficiencia del circuito (0 es pésimo, 1 es perfecto).

Ejercicio Tipo Examen

Enunciado: Un motor eléctrico (que modelamos como una resistencia y una bobina en serie) se conecta a una red de $V_{rms} = 230$ V. Consume una corriente eficaz de $I_{rms} = 10$ A, y la corriente va retrasada un ángulo $\phi = 30^\circ$ respecto al voltaje. Calcula la Potencia Activa que disipa el motor.

Paso 1: Identificar los datos

- Voltaje eficaz: $V_{rms} = 230$ V.
- Corriente eficaz: $I_{rms} = 10$ A.
- Desfase: $\phi = 30^\circ$.

Paso 2: Calcular el Factor de Potencia

$$fdp = \cos(30^\circ) \approx 0.866$$

Paso 3: Calcular la Potencia Activa (P)

Aplicamos directamente la fórmula de la potencia real consumida por el sistema:

$$P = V_{rms} \times I_{rms} \times \cos(\phi)$$

$$P = 230 \times 10 \times 0.866 = 2300 \times 0.866 = 1991.8 \text{ W}$$

Conclusión: El motor extrae de la red un total de 2300 VA (Potencia Aparente), pero solo es capaz de convertir en trabajo mecánico y calor aproximadamente 1992 W. El resto es energía reactiva que "rebota" entre el motor y la central eléctrica.

DÍA 9: MECÁNICA DE FLUIDOS

Flujo Real y Ecuación de Darcy-Weisbach

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Ecuación de Bernoulli (Día 8).
- Concepto de rugosidad de una tubería (ϵ) y diámetro (D).

Pérdidas de Carga Primarias (h_f)

Al bombear agua por una tubería real, la fricción viscosa destruye parte de la energía mecánica (Bernoulli ya no es constante, disminuye). Esta caída de energía a lo largo de tramos rectos se calcula con la ecuación de Darcy-Weisbach:

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$$

- f: Factor de fricción de Darcy (adimensional, depende del número de Reynolds y la rugosidad).
- L: Longitud de la tubería; D: Diámetro interno.
- $\frac{V^2}{2g}$: Altura de velocidad del fluido.

Ejercicio Tipo Examen

Enunciado: Se bombea agua a través de una tubería horizontal de hierro fundido de $L = 500$ m de longitud y diámetro interno $D = 0.2$ m. La velocidad media del fluido es $V = 3$ m/s. Sabiendo que, bajo estas condiciones, el factor de fricción es $f = 0.025$, calcula la pérdida de carga (h_f) y la caída de presión (ΔP) a lo largo de la tubería.

Paso 1: Calcular la pérdida de carga (h_f) en metros de columna de agua

$$h_f = f\left(\frac{L}{D}\right)\left(\frac{V^2}{2g}\right)$$

$$h_f = 0.025\left(\frac{500}{0.2}\right)\left(\frac{3^2}{2 \times 9.81}\right)$$

Resolvemos por partes:

- $\frac{500}{0.2} = 2500$
- $\frac{9}{19.62} \approx 0.4587$ m

$$h_f = 0.025 \times 2500 \times 0.4587 \approx 28.67 \text{ metros}$$

(La fricción ha consumido el equivalente a bombear el agua a un edificio de casi 10 pisos).

Paso 2: Relacionar la pérdida de carga con la caída de presión (ΔP)

En una tubería horizontal estricta, sin cambios de sección ($V_{in} = V_{out}$, $z_{in} = z_{out}$), la ecuación de la energía generalizada dice que la pérdida de energía se manifiesta puramente como una caída de presión:

$$h_f = \frac{\Delta P}{\rho g} \implies \Delta P = \rho g h_f$$

$$\Delta P = 1000 \times 9.81 \times 28.67 \approx 281,250 \text{ Pa} \approx 281 \text{ kPa}$$

Conclusión: La bomba al inicio de la instalación deberá suministrar al menos 281 kPa extra de presión solo para vencer el rozamiento de los 500 metros de tubería recta.

DÍA 10: RESUMEN DE ALTO RENDIMIENTO

Objetivo: Entender la propagación de ondas (matemática y energéticamente) y dominar el concepto de Capa Límite, el puente entre los fluidos ideales y los reales.

1. Ampliación de Matemáticas: La Ecuación de Onda

🧠 Mnemotecnia de la Cuerda de Guitarra

EDP de Onda: Relaciona cómo se curva la cuerda en el espacio (derivada segunda espacial) con cómo acelera hacia su posición de reposo (derivada segunda temporal). La constante que las une es el cuadrado de la velocidad de la onda (c^2).

2. Física II: El Vector de Poynting

⚡ Mnemotecnia del Cañón de Luz

Energía Electromagnética: Una onda EM no solo transmite información, transmite energía. El Vector de Poynting ($\vec{S}$) apunta hacia donde viaja la onda, y su tamaño te dice cuántos Vatios atraviesan cada metro cuadrado. Es el producto cruzado del campo eléctrico y el magnético.

3. Mecánica de Fluidos: Teoría de la Capa Límite

💧 Mnemotecnia del Coche Sucio

Condición de No-Deslizamiento: Aunque vayas a 120 km/h, la capa de aire que toca exactamente la chapa de tu coche va a 0 km/h respecto al coche. Esa zona delgada donde el aire frena desde 120 hasta 0 es la "Capa Límite". Por eso el viento no se lleva el polvo fino pegado a la carrocería.

DÍA 10: AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP): La Ecuación de Onda

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Derivadas parciales de segundo orden (Día 7).
- Regla de la cadena.

La EDP Unidimensional de Onda

Es la ecuación que gobierna las vibraciones de cuerdas, el sonido en un tubo o la luz en el vacío. Relaciona la curvatura espacial con la aceleración temporal:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Donde $u(x,t)$ es la perturbación (ej. altura de la cuerda) y c es la velocidad de propagación de la onda.

Ejercicio Tipo Examen: Comprobación de Soluciones (D'Alembert)

Enunciado: Demuestra que la función $u(x,t) = \sin(x - ct)$ es una solución válida para la ecuación de onda unidimensional.

Paso 1: Derivadas respecto al espacio (x)

Derivamos la función dos veces respecto a x (tratando a t como constante):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x - ct) \cdot (1) = \cos(x - ct)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin(x - ct)$$

Paso 2: Derivadas respecto al tiempo (t)

Derivamos la función dos veces respecto a t (la regla de la cadena saca un $-c$ cada vez):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \cos(x - ct) \cdot (-c) = -c\cos(x - ct)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c\,[-\sin(x - ct) \cdot (-c)] = -c^2 \sin(x - ct)$$

Paso 3: Sustituir en la EDP original

Comprobamos si el lado izquierdo es igual al derecho:

$$-c^2 \sin(x - ct) = c^2\,(-\sin(x - ct))$$

$$-c^2 \sin(x - ct) = -c^2 \sin(x - ct)$$

Conclusión: La igualdad se cumple. Esto demuestra que cualquier perturbación que viaje rígidamente hacia la derecha con forma $f(x - ct)$ es solución natural de esta ecuación diferencial.

DÍA 10: FÍSICA II

Energía de las Ondas y Vector de Poynting

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Producto vectorial cruzado ($\times$).
- Relación de amplitudes en ondas EM: $E = cB$ (Día 7).

El Vector de Poynting ($\vec{S}$)

Nos dice la cantidad de energía electromagnética que atraviesa una unidad de área por unidad de tiempo (Potencia por metro cuadrado, $\mathrm{W/m^2}$). Su dirección es la de propagación de la onda.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B})$$

El valor promedio de $\vec{S}$ en el tiempo se llama **Intensidad (I)** de la onda.

$$I = S_{prom} = \frac{E_{max} B_{max}}{2\mu_0} = \frac{E_{max}^2}{2\mu_0 c}$$

Ejercicio Tipo Examen: Irradiancia Solar

Enunciado: La luz del Sol llega a la atmósfera de la Tierra con una Intensidad promedio de $I = 1361\ \mathrm{W/m^2}$ (la constante solar). Calcula la amplitud máxima del campo eléctrico (E_{max}) y del campo magnético (B_{max}) de esta radiación. (Datos: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\ m/A}$, $c = 3 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$).

Paso 1: Despejar E_{max} de la ecuación de Intensidad

$$I = \frac{E_{max}^2}{2\mu_0 c} \implies E_{max} = \sqrt{2\mu_0 c I}$$

Paso 2: Sustituir valores

$$E_{max} = \sqrt{2 \times (4\pi \times 10^{-7}) \times (3 \times 10^8) \times 1361}$$

$$E_{max} = \sqrt{1026} \approx 1013 \text{ V/m}$$

Paso 3: Calcular B_{max}

Usamos la relación fundamental $B_{max} = \frac{E_{max}}{c}$:

$$B_{max} = \frac{1013}{3 \times 10^8} \approx 3.38 \times 10^{-6} \text{ Teslas (o } 3.38\ \mu\text{T)}$$

Conclusión: El Sol nos baña constantemente con campos eléctricos de más de 1000 Voltios por metro. Afortunadamente, oscilan tan rápido (frecuencia de la luz visible) que no nos electrocutan, pero esa energía es exactamente la que recogen los paneles solares.

DÍA 10: MECÁNICA DE FLUIDOS

La Teoría de la Capa Límite (Boundary Layer)

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Ecuación de Navier-Stokes y fricción viscosa (Día 7).
- Ley de Newton de la viscosidad: $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$.

El Concepto de Prandtl (1904)

Antes de 1904, la aerodinámica no podía explicar la resistencia al avance. Prandtl descubrió que la fricción viscosa en fluidos como aire o agua solo importa en una capa delgadísima pegada a la superficie del objeto sólido. Fuera de esa capa, el fluido se comporta como ideal (Bernoulli).

- **Condición de no deslizamiento:** En $y = 0$ (la pared), la velocidad del fluido es $u = 0$.
- **Espesor de la capa límite (δ):** Es la altura y donde el fluido alcanza el 99% de la velocidad de la corriente libre externa (U_∞).

Ejercicio Conceptual Clave: Esfuerzo Cortante

Enunciado: Cerca de la placa plana, el perfil de velocidades de un flujo de aire laminar dentro de la capa límite se puede aproximar por una parábola: $u(y) = U_\infty \left[2(\frac{y}{\delta}) - (\frac{y}{\delta})^2\right]$. Encuentra una expresión para el esfuerzo cortante (τ_w) en la pared sólida ($y = 0$).

Paso 1: Derivar el perfil de velocidades

Necesitamos el gradiente de velocidad $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \left[\frac{2}{\delta} - \frac{2y}{\delta^2}\right]$$

Paso 2: Evaluar el gradiente en la pared ($y = 0$)

Si sustituimos $y = 0$ en la derivada anterior:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = U_\infty \left[\frac{2}{\delta} - 0\right] = \frac{2U_\infty}{\delta}$$

Paso 3: Aplicar la Ley de Viscosidad de Newton

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{2\mu U_\infty}{\delta}$$

Conclusión: El esfuerzo (la fuerza de arrastre o fricción que siente la pared) depende directamente de la viscosidad (μ), de lo rápido que vaya el fluido fuera (U_∞) e inversamente del grosor de la capa límite (δ). A medida que el fluido avanza por la placa, la capa límite crece (aumenta δ), y por tanto, la fricción local en la pared disminuye.

DÍA 11: RESUMEN DE ALTO RENDIMIENTO

Objetivo: Dominar el análisis de sistemas dinámicos mediante Laplace, entender la resonancia en ondas y calcular sobrepresiones extremas en fluidos.

1. Ampliación de Matemáticas: Transformada de Laplace

🧠 Mnemotecnia del Traductor Universal

El Dominio 's': Resolver Ecuaciones Diferenciales en el tiempo (t) es como leer un libro en un idioma que no conoces. Laplace actúa como traductor: pasas el problema al dominio de la frecuencia (s), donde las derivadas se convierten en simples multiplicaciones. Resuelves usando álgebra de instituto, y luego usas el traductor inverso para volver al tiempo.

2. Física II: Ondas Estacionarias y Resonancia

⚡ Mnemotecnia de la Cuerda de Saltar

Nodos y Vientres: Si dos personas agitan una cuerda a la frecuencia exacta, la onda parece que no viaja; solo "palpita" en el sitio. Hay puntos que no se mueven nunca (Nodos) y puntos que saltan al máximo (Vientres). Esta es la base de todos los instrumentos musicales y del peligro de que un puente entre en resonancia y colapse.

3. Mecánica de Fluidos: El Golpe de Ariete

💧 Mnemotecnia del Atasco en la Autopista

Flujo Transitorio: Si cierras una válvula de golpe, el agua choca contra ella. Pero el agua que viene detrás aún no se ha enterado y sigue avanzando, comprimiéndose. Esto crea una onda de choque de alta presión que viaja hacia atrás por la tubería a la velocidad del sonido, pudiendo reventarla.

DÍA 11: AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

La Transformada de Laplace

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Integración impropia (límites hasta el infinito).
- Descomposición en fracciones parciales.

Definición Matemática

La transformada de Laplace convierte una función del tiempo $f(t)$ en una función de variable compleja $F(s)$. Se define mediante la integral:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

La magia reside en su propiedad fundamental para las derivadas. Si transformas una derivada, ¡desaparece el cálculo diferencial y se vuelve algebraico!

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

Ejercicio Tipo Examen: Cálculo por Definición

Enunciado: Calcula la Transformada de Laplace de la función exponencial $f(t) = e^{at}$ aplicando la definición de la integral. Asume que $s > a$.

Paso 1: Plantear la integral

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}(e^{at}) dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt$$

Paso 2: Resolver la integral impropia

La integral de una exponencial e^{kt} es $\frac{1}{k}e^{kt}$. Aquí $k = -(s-a)$:

$$F(s) = \left[\frac{-1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_0^\infty$$

Paso 3: Evaluar los límites

- En el límite superior ($t \to \infty$): Como $s > a$, el exponente es fuertemente negativo. $e^{-\infty}$ tiende a 0.
- En el límite inferior ($t = 0$): $e^0 = 1$.

$$F(s) = (0) - \left(\frac{-1}{s-a} \cdot 1\right) = \frac{1}{s-a}$$

Conclusión: $L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$. Con esta y un par de fórmulas más en una tabla, puedes resolver circuitos RLC y sistemas mecánicos complejos sin tener que hacer integrales nunca más.

DÍA 11: FÍSICA II

Ondas Estacionarias y Resonancia

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Ecuación de onda (Día 10).
- Principio de superposición (las ondas se suman).

Interferencia de Ondas

Cuando una onda choca contra una pared y rebota, la onda incidente y la reflejada viajan en sentidos opuestos y se superponen. Si la longitud del medio es un múltiplo exacto de semilongitudes de onda, se forma una **onda estacionaria**.

$$y(x,t) = [2A\sin(kx)]\cos(\omega t)$$

Fíjate que la posición (x) y el tiempo (t) están separados. La amplitud de cada punto viene dada por el corchete. Los **nodos** son los puntos donde la amplitud es siempre cero.

Ejercicio Tipo Examen: La Cuerda de Guitarra

Enunciado: Una cuerda de guitarra de longitud $L = 0.65$ m está fija por ambos extremos. La onda en la cuerda viaja a una velocidad $v = 260$ m/s. Calcula la frecuencia del modo fundamental (el primer armónico) y del segundo armónico.

Paso 1: Condición de frontera para cuerdas fijas

Como ambos extremos están fijos, deben ser Nodos. Para que esto ocurra, la longitud de la cuerda debe ser un múltiplo entero de medias longitudes de onda ($\frac{\lambda}{2}$):

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \implies \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

Paso 2: Calcular el Primer Armónico ($n = 1$, Modo Fundamental)

La longitud de onda del modo fundamental es $\lambda_1 = \frac{2(0.65)}{1} = 1.30$ m.

Usamos la relación $v = \lambda \cdot f$ para sacar la frecuencia:

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{260}{1.30} = 200 \text{ Hz}$$

Paso 3: Calcular el Segundo Armónico ($n = 2$)

La longitud de onda es $\lambda_2 = \frac{2(0.65)}{2} = 0.65$ m (exactamente la longitud de la cuerda).

$$f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{260}{0.65} = 400 \text{ Hz}$$

Conclusión: La nota base de esta cuerda son 200 Hz. El segundo armónico (que suena a la vez dándole el "timbre" a la guitarra) vibra al doble de frecuencia exacta. ¡Las matemáticas hacen la música!

DÍA 11: MECÁNICA DE FLUIDOS

Flujos Transitorios: El Golpe de Ariete (Water Hammer)

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Concepto de onda de presión (Día 10).
- Densidad (ρ).

La Ecuación de Joukowsky

Hasta ahora hemos visto fluidos estacionarios. Pero si cerramos una válvula instantáneamente, la energía cinética del agua se transforma violentamente en energía de presión. Se crea una onda de choque que viaja a la velocidad del sonido en el agua (c).

El incremento máximo de presión originado por este frenazo en seco se calcula con la ecuación de Joukowsky:

$$\Delta P = \rho \cdot c \cdot \Delta V$$

Donde ΔV es el cambio brusco de velocidad del agua, y c es la celeridad de la onda (aprox. 1400 m/s para agua en tubos rígidos).

Ejercicio Tipo Examen: Cierre de Válvula

Enunciado: Por una tubería de acero fluye agua ($\rho = 1000$ kg/m^3) a una velocidad de $V_0 = 2.5$ m/s. Un operario cierra una compuerta de forma casi instantánea, reduciendo la velocidad a 0 m/s. Asumiendo que la velocidad de la onda de presión en esta tubería es $c = 1200$ m/s, calcula la sobrepresión del golpe de ariete.

Paso 1: Identificar los datos

- Densidad: $\rho = 1000$ kg/m^3.
- Celeridad de la onda: $c = 1200$ m/s.
- Cambio de velocidad: El fluido pasa de 2.5 m/s a 0. $\Delta V = 2.5$ m/s.

Paso 2: Aplicar la Ecuación de Joukowsky

$$\Delta P = \rho \cdot c \cdot \Delta V$$

$$\Delta P = 1000 \times 1200 \times 2.5$$

Paso 3: Resolver y analizar las unidades

$$\Delta P = 3,000,000 \text{ Pascales} = 3 \text{ MPa} = 30 \text{ Bares}$$

Conclusión: Al cerrar la válvula de golpe, la presión dentro del tubo pega un salto instantáneo de **30 Bares** (aproximadamente 30 veces la presión atmosférica). Esto equivale a añadir de golpe el peso de 300 metros de agua sobre la tubería. Por esto es vital cerrar las válvulas despacio en la industria pesada o instalar chimeneas de equilibrio.

DÍA 12: RESUMEN DE ALTO RENDIMIENTO (EL GRAN FINAL)

Objetivo: Predecir lo impredecible con estadística, entender que la luz está hecha de "balas" de energía, y calcular la potencia de las máquinas hidráulicas del mundo real.

1. Ampliación de Matemáticas: Probabilidad y Bayes

🧠 Mnemotecnia del Detective Inverso

Teorema de Bayes: Te permite ir "hacia atrás" en el tiempo. Si sabes que alguien tiene tos (el efecto), Bayes te dice cuál es la probabilidad de que tenga un resfriado (la causa), basándose en cuánta gente con resfriado tose y cuánta gente se resfría en general. Actualiza tus creencias con nuevas pruebas.

2. Física II: Cuántica y el Fotón

⚡ Mnemotecnia de la Máquina Expendedora

El Efecto Fotoeléctrico: La luz no es un chorro de agua continuo, es como meter monedas en una máquina expendedora. Cada "moneda" es un Fotón ($E = hf$). Si la moneda no tiene el valor mínimo (la función de trabajo del metal), el electrón no sale, por mucha luz (muchas monedas pequeñas) que le eches.

3. Mecánica de Fluidos: Máquinas Hidráulicas (Bombas)

💧 Mnemotecnia del Corazón Mecánico

Curvas de Bomba y Sistema: La bomba da energía (Altura, H) al fluido. Cuanto más caudal (Q) exiges, menos altura te puede dar. El punto exacto donde el tubo "exige" lo mismo que la bomba "ofrece" es el Punto de Funcionamiento. La potencia requerida depende de qué tan eficiente (η) sea este corazón.

DÍA 12: AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Probabilidad Total y Teorema de Bayes

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Probabilidad básica (P).
- Probabilidad condicionada $P(A|B)$ (Probabilidad de A dado que ha ocurrido B).

El Teorema de Bayes

Es la fórmula más importante de la estadística moderna. Permite calcular la probabilidad de una "Causa" dado que hemos observado un "Efecto", usando la probabilidad Total del efecto.

$$P(Causa_i|Efecto) = \frac{P(Efecto|Causa_i) \cdot P(Causa_i)}{P(EfectoTotal)}$$

Donde $P(EfectoTotal) = \sum P(Efecto|Causa_j) \cdot P(Causa_j)$ (Teorema de la Probabilidad Total).

Ejercicio Tipo Examen: Control de Calidad

Enunciado: En una fábrica, la Máquina A produce el 60% de los tornillos y la Máquina B el 40%. Se sabe que el 2% de los tornillos de la Máquina A son defectuosos, mientras que el 5% de los de la Máquina B lo son. Un inspector coge un tornillo al azar de la caja final y resulta ser **defectuoso**. ¿Cuál es la probabilidad de que lo haya fabricado la Máquina B?

Paso 1: Definir los sucesos y probabilidades a priori

- $P(A) = 0.60$ (Probabilidad de que sea de A).
- $P(B) = 0.40$ (Probabilidad de que sea de B).
- $P(D|A) = 0.02$ (Probabilidad de ser Defectuoso sabiendo que viene de A).
- $P(D|B) = 0.05$ (Probabilidad de ser Defectuoso sabiendo que viene de B).

Paso 2: Calcular la Probabilidad Total de ser Defectuoso ($P(D)$)

Puede ser defectuoso viniendo de A o viniendo de B:

$$P(D) = P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B)$$

$$P(D) = (0.02 \times 0.60) + (0.05 \times 0.40) = 0.012 + 0.020 = 0.032$$

El 3.2% de todos los tornillos de la fábrica son defectuosos.

Paso 3: Aplicar el Teorema de Bayes

Buscamos $P(B|D)$: Probabilidad de venir de B, sabiendo que ya es Defectuoso.

$$P(B|D) = \frac{P(D|B) \cdot P(B)}{P(D)}$$

$$P(B|D) = \frac{0.05 \times 0.40}{0.032} = \frac{0.020}{0.032} = 0.625$$

Conclusión: Hay un **62.5%** de probabilidad de que el tornillo roto sea culpa de la Máquina B. Aunque B produce menos tornillos en total, su alta tasa de fallos la convierte en la principal sospechosa. ¡Así razonan los algoritmos de IA médica!

DÍA 12: FÍSICA II

Física Cuántica: El Fotón y el Efecto Fotoeléctrico

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Frecuencia (f) y longitud de onda (λ): $c = \lambda \cdot f$.
- Manejo de unidades pequeñas (Nanómetros nm y Electrón-Voltios eV).

La Energía Cuantizada de Planck-Einstein

La luz no es una onda continua en el mundo subatómico. Está formada por "paquetes" individuales de energía llamados fotones. La energía de un solo fotón depende exclusivamente de su frecuencia (su color), no de su intensidad.

[Image of Photoelectric effect physics]

$$E = h \cdot f = \frac{h \cdot c}{\lambda}$$

- h: Constante de Planck ($6.626 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$).
- Si un fotón tiene energía suficiente, puede "arrancar" un electrón de un metal (Efecto Fotoeléctrico).

Ejercicio Tipo Examen: Energía de un Láser

Enunciado: Un puntero láser emite luz verde con una longitud de onda de $\lambda = 532\ \mathrm{nm}$. Calcula la energía de un solo fotón de este láser en Julios y en Electrón-Voltios (eV). (Datos: $1\ \mathrm{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$, $c = 3 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s}$).

Paso 1: Convertir la longitud de onda a metros

$$\lambda = 532\ \mathrm{nm} = 532 \times 10^{-9}\ \mathrm{m}$$

Paso 2: Calcular la energía en Julios

Usamos la fórmula $E = \frac{hc}{\lambda}$:

$$E = \frac{(6.626 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^8)}{532 \times 10^{-9}}$$

$$E = \frac{1.9878 \times 10^{-25}}{532 \times 10^{-9}} \approx 3.73 \times 10^{-19} \text{ Julios}$$

Paso 3: Convertir a Electrón-Voltios (eV)

Como los Julios son incómodos a escala atómica, dividimos entre la carga del electrón:

$$E\,(\text{eV}) = \frac{3.73 \times 10^{-19} \text{ J}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ J/eV}} \approx 2.33 \text{ eV}$$

Conclusión: Cada partícula de luz de tu láser verde lleva una energía de 2.33 eV. Si intentas iluminar un metal que requiere 3 eV para soltar un electrón, no pasará absolutamente nada, aunque enciendas un millón de láseres verdes. ¡Esa es la revolución cuántica!

DÍA 12: MECÁNICA DE FLUIDOS

Máquinas Hidráulicas y Potencia de Bombeo

Conocimientos Básicos Necesarios:

- Ecuación generalizada de la energía (Bernoulli con pérdidas y máquinas).
- Densidad (ρ) y Caudal (Q).

Potencia Hidráulica vs Potencia Eléctrica

Una bomba inyecta energía al fluido para vencer la gravedad y las fricciones (Día 9). La energía por unidad de peso se llama **Altura de Bomba (H_B)** medida en metros.

La potencia que el fluido realmente recibe es:

$$P_{hidraulica} = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H_B$$

Pero la bomba no es perfecta. Pierde energía por calor y fricción mecánica. La potencia eléctrica real que consume del motor es:

$$P_{electrica} = \frac{P_{hidraulica}}{\eta}$$

Donde η es el rendimiento (eficiencia) de la bomba (un número entre 0 y 1).

Ejercicio Tipo Examen: Selección de Bomba

Enunciado: Se necesita bombear agua ($\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$) a un depósito situado a $H_B = 40\ \mathrm{m}$ de altura (incluyendo las pérdidas por fricción de la tubería). El caudal requerido es de $Q = 0.05\ \mathrm{m^3/s}$ (50 litros por segundo). La bomba disponible tiene un rendimiento del $\eta = 75\%$. Calcula la potencia eléctrica mínima que debe tener el motor de esta bomba en kilovatios (kW).

Paso 1: Calcular la Potencia Hidráulica útil

Esta es la energía estricta que necesita el agua por segundo:

$$P_{hidraulica} = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H_B$$

$$P_{hidraulica} = 1000 \times 9.81 \times 0.05 \times 40$$

$$P_{hidraulica} = 19,620 \text{ W} = 19.62 \text{ kW}$$

Paso 2: Calcular la Potencia Eléctrica (Consumo Real)

Como la bomba rinde al 75% ($\eta = 0.75$), necesita consumir MÁS energía eléctrica de la red para entregar esos 19.62 kW al agua.

$$P_{electrica} = \frac{19.62 \text{ kW}}{0.75}$$

$$P_{electrica} = 26.16 \text{ kW}$$

Conclusión: Tendrás que ir al catálogo y comprar un motor eléctrico de al menos 26.2 kW (unos 35 Caballos de Vapor). ¡Con este cálculo final, oficialmente estás preparado para enfrentarte al mundo de la ingeniería!